УДК 514.76

С.А. Багдановіч

АМАЛЬ ГІПЕРЭРМІТАВА СТРУКТУРА ДРУГОГА РОДУ ТЫПУ (J, P_1, P_2) НА ДАТЫЧНЫМ РАСПЛАСТАННІ РЫМАНАВАЙ МНАГАСТАЙНАСЦІ

Уводзіны. Паняцці кананічная звязнасць $\overline{\nabla}$ і другое фундаментальнае тэнзарнае поле h класічных структур (амаль эрмітавай, рыманавай структуры амаль здабытку, f–структуры і г.д.) былі уведзены ў канцы XX ст. А.А. Ермаліцкім. Даследаванні такіх структур у тэрмінах вышэй адзначаных паняццяў выкладзены ў манаграфіі [**1**].

Пабудова $\overline{\nabla}$ і h, доказ шэрагу звязаных з імі сцвярджэнняў для амаль гіперэрмітавай структуры першага і другога роду прыведзены ў [**2-4**]. Артыкул [**5**] змяшчае вынікі даследавання амаль гіперэрмітавай структуры першага рода на датычным распластанні рыманавай мнагастайнасці.

Мэтай дадзенага артыкула з'яўляецца пабудова амаль гіперэрмітавай структуры другога роду тыпу (J, P_1, P_2) на датычным распластанні і доказ існавання бясконцага мноства такіх структур.

1^0. Амаль гіперэрмітава структура другога роду тыпу (J, P_1, P_2). Тры тэнзарныя палі J, P_1, P_2 тыпу (1, 1) на гладкай звязнай мнагастайнасці M ($\dim M=2n$), якія задавальняюць умовам

$$J^2=-I,\ \ P_1^2=I,\ \ P_2^2=I,\ \ J=-P_1P_2=P_2P_1,\ \ P_1=P_2J=-JP_2,\ \ P_2=JP_1=-P_1J, \quad (1)$$

называюцца амаль кватерніённай структурай другога роду [**6**].

Калі маюць месца роўнасці

$$g(X, Y)=g(JX, JY)=g(P_1X, P_1Y)=g(P_2X, P_2Y),$$

дзе g — фіксаваная рыманава метрыка, X, Y — вектарныя палі на M, то такая структура называецца амаль гіперэрмітавай структурай другога роду тыпу (J, P_1, P_2) і абазначаецца (J, P_1, P_2, g). Пры гэтым (J, g) з'яўляецца амаль эрмітавай структурай, а (P_1, g) і (P_2, g) — рыманавымі структурамі амаль здабытку.

Калі ∇ — рыманава звязнасць метрыкі g, то кананічная звязнасць $\overline{\nabla}$ структуры (J, P_1, P_2, g) мае выгляд [**3**]

$$\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{4}\left(\nabla_X Y - J\nabla_X JY + P_1\nabla_X P_1Y + P_2\nabla_X P_2Y\right),$$

дзе X, Y — любыя вектарныя палі на M.

Тэнзарнае поле h вызначаецца па формуле [**1**]

$$h_XY=\nabla_XY-\overline{\nabla}_XY$$

і мае месца роўнасць

$$h_{XYZ}=g(h_XY, Z)=-h_{XZY}. \quad (2)$$

Для структуры (J, P_1, P_2, g) гэтае поле мае выгляд [**3**]

$$h = \frac{1}{2}(h^J + h^1 + h^2), \qquad (3)$$

дзе h^J, h^1 і h^2 — другія фундаментальныя тэнзарныя палі структур (J, g), (P_1, g) і (P_2, g) адпаведна.

2^0. Адлюстраванне звязнасці. Няхай (M, g) — рыманава мнагастайнасць ($\dim M=n$) і TM — яе датычнае распластанне. Для метрычнай звязнасці $\tilde{\nabla}$ ($\tilde{\nabla} g=0$) разгледзім адлюстраванне $\tilde{K}$ [**7**, **8**], якое вызначаецца формулай

$$\tilde{\nabla}_X Z = \tilde{K} Z_* X,$$

дзе Z разглядаецца як адлюстраванне з M у TM і правая частка ёсць вектарнае поле, якое супастаўляе пункту $p \in M$ вектар $\tilde{K} Z_* X_p \in M_p$.

Калі $U \in TM$, абазначым праз H_U ядро $\tilde{K}|_{TM_U}$ і гэтая n–мерная падпрастора TM_U называецца гарызантальнай падпрасторай TM_U. Няхай π абазначае натуральную праекцыю TM на M, тады π_* ёсць C^∞–адлюстраванне TTM на TM. Калі $U \in TM$, абазначым праз V_U ядро $\pi_*|_{TM_U}$ і гэтая n–мерная падпрастора TM_U называецца вертакальнай падпрасторай TM_U ($\dim TM_U = 2\dim M = 2n$). Наступныя адлюстраванні з'яўляюцца ізамарфізмамі адпаведнай вектарнай прасторы ($p=\pi(U)$):

$$\pi_*|_{TM_U} : H_U \to M_p,$$

$$\tilde{K}|_{TM_U} : V_U \to M_p$$

і ма маем

$$TM_U = H_U \oplus V_U.$$

Калі X — вектарнае поле на M, то існуе адзінае вектарнае поле на TM, якое называецца «гарызантальным ліфтам» (адпаведна «вертыкальным ліфтам») X і абазначаецца $\bar{X}^h$ (адпаведна $\bar{X}^v$), такое, што для ўсіх $U \in TM$

$$\pi_* \bar{X}_U^h = X_{\pi(U)}, \qquad \pi_* \bar{X}_U^v = 0_{\pi(U)},$$

$$\tilde{K}\bar{X}_U^h = 0_{\pi(U)}, \qquad \tilde{K}\bar{X}_U^v = X_{\pi(U)}.$$

Няхай $\tilde{R}$ — тэнзарнае поле крывізны звязнасці $\tilde{\nabla}$, тады з [**7**]

$$[\bar{X}^v, \bar{Y}^v]=0, \qquad (4)$$

$$[\bar{X}^h, \bar{Y}^v]=\left(\overline{\tilde{\nabla}_X Y}\right)^v, \qquad (5)$$

$$\pi_*([\bar{X}^h, \bar{Y}^h]_U)=[X, Y]_U, \qquad (6)$$

$$\tilde{K}([\bar{X}^h, \bar{Y}^h]_U)=\tilde{R}(X, Y)U. \qquad (7)$$

Для вектарных палёў $\bar{X} = \bar{X}^h \oplus \bar{X}^v$ і $\bar{Y} = \bar{Y}^h \oplus \bar{Y}^v$ на TM натуральная рыманава метрыка $\hat{g} = \langle\, , \rangle$ на TM вызначаецца формулай

$$\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle = g(\pi_* \bar{X}, \pi_* \bar{Y}) + g(\tilde{K}\bar{X}, \tilde{K}\bar{Y}).$$

Відавочна, што падпрасторы H_U і V_U артаганальныя адносна < , >. Калі $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — артанарміраваныя на M вектарныя палі (г. зн. $g(X_i, X_j)=\delta^i_j$), то $\overline{X}{}_1^h, \overline{X}{}_2^h, \ldots, \overline{X}{}_n^h$, $\overline{X}{}_1^v, \overline{X}{}_2^v, \ldots, \overline{X}{}_n^v$ — артанарміраваныя вектарныя палі на TM.

3^0. Кананічная амаль эрмітава структура. Вызначым тэнзарнае поле J на TM роўнасцямі [7]

$$J\overline{X}{}^h = \overline{X}{}^v, \quad J\overline{X}{}^v = -\overline{X}{}^h,$$

дзе X — вектарнае поле на M. Тады

$$J\overline{X} = J(J(\overline{X}{}^h \oplus \overline{X}{}^v)) = J(-\overline{X}{}^h \oplus \overline{X}{}^v) = -(\overline{X}{}^h \oplus \overline{X}{}^v) = -I\,\overline{X},$$

г. зн. $J^2=-I$.

Легка паказаць, што $<J\overline{X},\ J\overline{Y}>=<\overline{X},\ \overline{Y}>$, таму ($TM$, J, < , >) — кананічная амаль эрмітава мнагастайнасць.

Разгледзім другое фундаментальнае тэнзарнае поле h^J пары (J, < , >). Рыманава звязнасць $\hat{\nabla}$ метрыкі $\hat{g}=<\ ,\ >$ на TM вызначаецца па формуле [**8**]

$$<\hat{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}> = \frac{1}{2}(\overline{X}<\overline{Y},\overline{Z}> + \overline{Y}<\overline{Z},\overline{X}> - \overline{Z}<\overline{X},\overline{Y}> + <\overline{Z},[\overline{X},\overline{Y}]> +$$
$$+ <\overline{Y},[\overline{Z},\overline{X}]> + <\overline{X},[\overline{Z},\overline{Y}]>, \qquad (8)$$

дзе $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ — вектарныя палі на TM.

Выкарыстаўшы $h^J_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + J\nabla_X JY)$ і (2), для артанарміравальных вектарных палёў $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ на TM атрымаем

$$h^J_{\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}} = <h^J_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}> = \frac{1}{2}<\hat{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} + J\hat{\nabla}_{\overline{X}}J\overline{Y}, \overline{Z}> = \frac{1}{2}(<\hat{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}> - <\hat{\nabla}_{\overline{X}}J\overline{Y}, J\overline{Z}>) =$$
$$= \frac{1}{4}\Big(<[\overline{X},\overline{Y}],\overline{Z}> + <[\overline{Z},\overline{X}],\overline{Y}> + <[\overline{Z},\overline{Y}],\overline{X}> - <[\overline{X},J\overline{Y}],J\overline{Z}> -$$
$$- <[J\overline{Z},\overline{X}],J\overline{Y}> - <[J\overline{Z},J\overline{Y}],\overline{X}>\Big). \qquad (9)$$

З улікам (4)-(7) і (9), разгледзім наступныя выпадкі для h^J, мяркуючы, што ўсе адпаведныя вектарныя палі артанарміравальныя.

$$h^J_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^h} = \frac{1}{4}(<[\overline{X}{}^h,\ \overline{Y}{}^h],\ \overline{Z}{}^h>+<[\overline{Z}{}^h,\ \overline{X}{}^h],\ \overline{Y}{}^h>+<[\overline{Z}{}^h,\ \overline{Y}{}^h],\ \overline{X}{}^h>-$$
$$-<[\overline{X}{}^h,\ J\overline{Y}{}^h],\ J\overline{Z}{}^h>-<[J\overline{Z}{}^h,\ \overline{X}{}^h],\ J\overline{Y}{}^h>-<[J\overline{Z}{}^h,\ J\overline{Y}{}^h],\ \overline{X}{}^h>)=$$
$$=\frac{1}{4}(g([X, Y], Z)+g([Z, X], Y)+g([Z, Y], X)-<[\ \overline{X}{}^h,\ \overline{Y}{}^v],\ \overline{Z}{}^v>-$$
$$-<[\overline{Z}{}^v,\ \overline{X}{}^h],\ \overline{Y}{}^v>-<[\overline{Z}{}^v,\ \overline{Y}{}^v],\ \overline{X}{}^h>)=\frac{1}{2}g(\nabla_X Y, Z)-\frac{1}{4}(g(\tilde{\nabla}_X Y, Z)-$$
$$-g(\tilde{\nabla}_X Z, Y))=\frac{1}{2}(g(\nabla_X Y, Z)-g(\tilde{\nabla}_X Y, Z)).$$

$$h^J_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^v} = \frac{1}{4}(<[\overline{X}{}^h,\ \overline{Y}{}^h],\ \overline{Z}{}^v>+<[\overline{Z}{}^v,\ \overline{X}{}^h],\ \overline{Y}{}^h>+<[\overline{Z}{}^v,\ \overline{Y}{}^h],\ \overline{X}{}^h>-$$

$-<[\bar{X}^h, J\bar{Y}^h], J\bar{Z}^v> - <[J\bar{Z}^v, \bar{X}^h], J\bar{Y}^h> - <[J\bar{Z}^v, J\bar{Y}^h], \bar{X}^h>)=$

$=\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Y)U, Z)+<[\bar{Z}^h, \bar{X}^h], \bar{Y}^v>)=\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Y)U, Z)+$

$+g(\tilde{R}(Z, X)U, Y))=-\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Y)Z, U)+g(\tilde{R}(Z, X)Y, U)).$

$$h^J_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = -\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(Z, X)Y, U)+g(\tilde{R}(X, Y)Z, U)).$$

$$h^J_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = -\frac{1}{4}g(\tilde{R}(Z, Y)X, U).$$

$$h^J_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = \frac{1}{4}g(\tilde{R}(Z, Y)X, U).$$

$$h^J_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = 0.$$

$$h^J_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = 0.$$

$$h^J_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = \frac{1}{2}(g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z)).$$

4⁰. Амаль гіперэрмітава структура другога роду тыпу (J, P_1, P_2) на датычным распластанні. Вызначым тэнзарнае поле P_1 на TM роўнасцямі

$$P_1\bar{X}^h = \bar{X}^h,\ P_1\bar{X}^v = -\bar{X}^v.$$

Маем

$$P_1^2\bar{X} = P_1(P_1(\bar{X}^h \oplus \bar{X}^v)) = P_1(\bar{X}^h \oplus -\bar{X}^v) = (\bar{X}^h \oplus \bar{X}^v) = I\bar{X},$$

г. зн. $P_1^2 = I$. Лёгка праверыць, што $<P_1\bar{X}, P_1\bar{Y}> = <\bar{X}, \bar{Y}>$, таму ($P_1$, < , >) — рыманава структура амаль здабытку.

Далей,

$$J(P_1\bar{X}) = J(\bar{X}^h \oplus -\bar{X}^v) = (\bar{X}^v \oplus \bar{X}^h) = (\bar{X}^h \oplus \bar{X}^v),$$

$$P_1(J\bar{X}) = P_1(\bar{X}^v \oplus -\bar{X}^h) = (-\bar{X}^v \oplus -\bar{X}^h) = -(\bar{X}^h \oplus \bar{X}^v).$$

Адсюль $JP_1 = -P_1J = P_2$, дзе тэнзарнае поле P_2 вызначаецца на TM роўнасцямі

$$P_2\bar{X}^h = \bar{X}^v,\ P_2\bar{X}^v = \bar{X}^h. \tag{10}$$

Паколькі $<P_2\bar{X}, P_2\bar{Y}> = <\bar{X}, \bar{Y}>$ і выконваюцца ўмовы (1), то (P_2, < , >) — рыманава структура амаль здабытку на TM і (J, P_1, P_2, < , >) — амаль гіперэрмітава структура другога роду на TM.

Разгледзім другое фундаментальнае тэнзарнае поле h^1 структуры (P_1, < , >). Выкарыстаўшы формулу $h^1_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - P_1\nabla_X P_1 Y)$, раней адзначаныя выразы (2) і (8), для артанарміравальных палёў $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ на TM будзем мець

$$h^1_{\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}} = <h^1_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z}> = \frac{1}{2}<\hat{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - P_1\hat{\nabla}_{\bar{X}}P_1\bar{Y}, \bar{Z}> =$$

$$= \frac{1}{2}(< \hat{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z} > - < \hat{\nabla}_{\overline{X}} P_1\overline{Y}, P_1\overline{Z} >) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(< [\overline{X}, \overline{Y}], \overline{Z} > + < [\overline{Z}, \overline{X}], \overline{Y} > + < [\overline{Z}, \overline{Y}], \overline{X} > - < [\overline{X}, P_1\overline{Y}], P_1\overline{Z} > -$$

$$- < [P_1\overline{Z}, \overline{X}], P_1\overline{Y} > - < [P_1\overline{Z}, P_1\overline{Y}], \overline{X} >\Big). \qquad (11)$$

З улікам (4)-(7) і (11), разгледзім наступныя выпадкі для h^1, мяркуючы, што ўсе адпаведныя вектарныя палі артанарміравальныя.

$$h^1_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^h} = \frac{1}{4}(<[\overline{X}^h, \overline{Y}^h], \overline{Z}^h>+<[\overline{Z}^h, \overline{X}^h], \overline{Y}^h>+<[\overline{Z}^h, \overline{Y}^h], \overline{X}^h>-$$

$$-<[\overline{X}^h, P_1\overline{Y}^h], P_1\overline{Z}^h>-<[P_1\overline{Z}^h, \overline{X}^h], P_1\overline{Y}^h>-<[P_1\overline{Z}^h, P_1\overline{Y}^h], \overline{X}^h>)=$$

$$=\frac{1}{4}(g([X, Y], Z)+g([Z, X], Y)+g([Z, Y], X)-g([X, Y], Z)-g([Z, X], Y)-$$

$$-g([Z, Y], X))=0.$$

$$h^1_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^v} = \frac{1}{4}(<[\overline{X}^h, \overline{Y}^h], \overline{Z}^v>+<[\overline{Z}^v, \overline{X}^h], \overline{Y}^h>+<[\overline{Z}^v, \overline{Y}^h], \overline{X}^h>-$$

$$-<[\overline{X}^h, P_1\overline{Y}^h], P_1\overline{Z}^v>-<[P_1\overline{Z}^v, \overline{X}^h], P_1\overline{Y}^h>-<[P_1\overline{Z}^v, P_1\overline{Y}^h], \overline{X}^h>)=$$

$$=\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Y)U, Z)+g(\tilde{R}(X, Y)U, Z))=\frac{1}{2}(g(\tilde{R}(X, Y)U, Z)=$$

$$=-\frac{1}{2}g(\tilde{R}(X, Y)Z, U).$$

$$h^1_{\overline{X}^h\overline{Y}^v\overline{Z}^h} = -\frac{1}{2}g\tilde{R}(Z, X)Y, U).$$

$$h^1_{\overline{X}^v\overline{Y}^h\overline{Z}^h} = 0.$$

$$h^1_{\overline{X}^v\overline{Y}^v\overline{Z}^v} = 0.$$

$$h^1_{\overline{X}^v\overline{Y}^v\overline{Z}^h} = 0.$$

$$h^1_{\overline{X}^v\overline{Y}^h\overline{Z}^v} = 0.$$

$$h^1_{\overline{X}^h\overline{Y}^v\overline{Z}^v} = 0.$$

Па аналогіі можна падлічыць кампаненты другога фундаментальнага тэнзарнага поля h^2 рыманавай структуры амаль здабытку (P_2, < , >), дзе тэнзарнае поле P_2 вызначаецца роўнасцямі (10). Яны наступныя:

$$h^2_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^h} = \frac{1}{2}(g(\nabla_X Y, Z)-g(\tilde{\nabla}_X Y, Z)).$$

$$h^2_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^v} = -\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Y)Z, U)-g(\tilde{R}(Z, X)Y, U)).$$

$$h^2_{\overline{X}^h\overline{Y}^v\overline{Z}^h} = \frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Y)Z, U)-g(\tilde{R}(Z, X)Y, U)).$$

$$h^2_{\bar{X}^v \bar{Y}^h \bar{Z}^h} = -\frac{1}{4} g(\tilde{R}(Z, Y)X, U).$$

$$h^2_{\bar{X}^v \bar{Y}^v \bar{Z}^v} = \frac{1}{4} g(\tilde{R}(Z, Y)X, U).$$

$$h^2_{\bar{X}^v \bar{Y}^v \bar{Z}^h} = 0.$$

$$h^2_{\bar{X}^v \bar{Y}^h \bar{Z}^v} = 0.$$

$$h^2_{\bar{X}^h \bar{Y}^v \bar{Z}^v} = \frac{1}{2} (g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z)).$$

З атрыманых значэнняў тэнзарных палёў h^J, h^1, h^2 і (3) вынікае, што пабудаваная амаль гіперэрмітава структура другога роду $(J, P_1, P_2, \hat{g})$ на датычным распластанні TM рыманавай мнагастайнасці (M, g) цалкам вызначаецца парай $(g, \tilde{\nabla})$, дзе $\tilde{\nabla}$ — метрычная звязнасць. Змяняючы метрыку g і звязнасць $\tilde{\nabla}$, атрымоўваем бясконцае мноства амаль гіперэрмітавых структур другога роду тыпу (J, P_1, P_2) на TM.

SUMMARY

An almost hyperHermitian structure (J, P_1, P_2, g) of the second kind on a tangent bundle of the Riemannian manifold M has been considered in the paper.

ЛІТАРАТУРА

1. Ермолицкий А.А. Римановы многообразия с геометрическими структурами. Мн., 1998.
2. Багдановіч С.А. Кананічная звязнасць і другое фендументальнае тэнзарнае поле амаль эрмітавай гіперкамплекснай мнагастайнасці // Весці БДПУ. 2002. №2. С. 194-198.
3. Багдановіч С.А. Кананічная звязнасць і другое фендументальнае тэнзарнае поле амаль гіперэрмітавай структуры другога роду тыпу (J, P_1, P_2) // Весці БДПУ. 2005. №2. Серыя 3. С. 13-16.
4. Богданович С.А., Ермолицкий А.А Каноническая связность и второе фундаментальное тензорное поле почти гиперэрмитовой структуры второго рода типа (J_1, J_2, P) // Мн.: МГВРК. 2007. Часть 3. С. 155-156.
5. Bogdanovich S.A., Ermolitski A.A. On almost hyperHermitian structures on Riemannian manifolds and tangent bundles // Central Europ. J. Math. 2004. Vol. 2. Issue 5. P. 615-623.
6. K. Yano, M. Ako. Almost quaternion structures of the second kind and almost tangent structures // Kodai Math. Sem. Rep. 1973. Vol. 25. P. 63–91.
7. Dombrowski, P. On the Geometry of the Tangent Bundle // J. Reine und Angew. Math. – 1962. – № 210. – P. 73–88.
8. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М. 1971.

УДК 514.76

Багдановіч С.А. Амаль гіперэрмітава структура другога роду тыпу (J, P_1, P_2) на датычным распластанні рыманавай мнагастайнасці // Весці БДПУ. 2010. № . Серыя 3. С.

Пабудавана амаль гіперэрмітава структура другога роду тыпу (J, P_1, P_2) на датычным распластанні рыманавай мнагастайнасці і даказана існаванне бясконцага мноства такіх структур.

Бібліягр. – 8 назваў.